

# 國立台灣大學機械工程學系 106 學年度 大學甄選入學綜合評量筆試試題

作答注意事項：

1. 考試時間為 100 分鐘
2. 不得參考圖書等資料
3. 題目共有六大題，滿分為 100 分
4. 請在另附的試卷上作答
5. 本試題紙須隨試卷繳回

- 請注意: 1. 題目共有六大題，請儘量作答，滿分為 100 分。  
 2. 請在另附的試卷上作答。  
 3. 本試題紙請務必隨試卷繳回。

1. (8%) 試求拋物線  $y = x(1 - x)$  在第一象限的線段下方與  $x$  軸上方的平面空間裡面積最大的矩形之(a) (4%)所有頂點座標，以及(b) (4%)面積。

2. (12%) 申論題：判斷下列敘述是否正確，並詳述理由。

- (a) (3%) 若  $A$  和  $B$  皆為可逆方陣且大小相同，則  $A + B$  和  $AB$  也都是可逆方陣。  
 (b) (3%) 若  $C$  和  $D$  為大小相同的兩個方陣且都沒有反矩陣，則  $\det(CD) = \det(C)\det(D) = \det(C) + \det(D)$ 。  
 (c) (3%) 對任意矩陣  $E$ ，若存在矩陣  $F$  使得  $EF = I$ ，則  $E$  和  $F$  必互為反矩陣。(I 為單位矩陣)  
 (d) (3%) 如果三個方陣  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  滿足  $P + Q = R$ ，則  $\det(P + Q) = \det(P) + \det(Q) = \det(R)$ 。

3. (20%) 電路設計問題。

- (a) (5%) 有一個家用燈泡，其規格為功率 100 瓦在直流電壓 110 伏特產生，請問其燈泡的等效電阻(如圖 3.1 所示)會是多少?  
 (b) (5%) 將兩個上一小題的相同燈泡分別以(i)串聯和(ii)並聯接在一個 110 伏特的直流電壓上，請問其產生的總功率各是多少?  
 (c) (5%) 請問上一小題的兩種接法，哪一種接法比較省電? 哪一種接法燈泡會比較亮?  
 (d) (5%) 假設你想用蓄電池來點亮一個燈泡，現在你有 5 個電壓 20 伏特、內電阻 2 歐姆的蓄電池，其等效電路如圖 3.2 所示，請畫出(i)最省電，和(b)最大輸出功率的電路接法，並計算個別的輸出總功率。

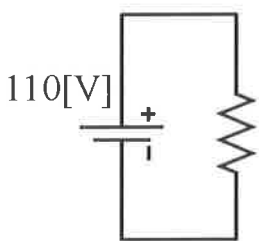


圖 3.1

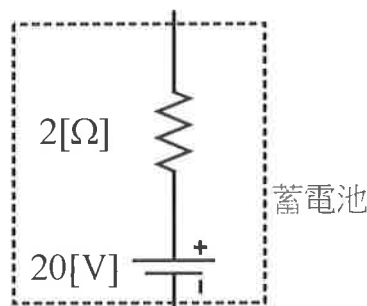


圖 3.2

4. (20%) 如圖 4.1 所示，一個圓柱型的水桶，其底面積為  $500 \text{ cm}^2$ ，深度為  $90 \text{ cm}$ 。今將水注入至  $80 \text{ cm}$  的水位。現有圓球每顆體積  $100 \text{ cm}^3$ ，重量  $450 \text{ g}$ 。(重力加速度為  $10 \text{ m/s}^2$ ，水的密度為  $1 \text{ g/cm}^3$ )

(a) (2%) 如圖 4.2 所示，逐一將球放入水桶，試問放入第幾顆球時水桶的水將溢出?

(b) (4%) 承上題，在水中的 1 號球共受到哪些力?其大小各為何?(單位為牛頓)

(c) (8%) 今有一個圓柱型罐子，其重量可忽略，底面積為  $200 \text{ cm}^2$ ，高度為  $50 \text{ cm}$ 。罐子以兩條彈簧與水桶相連接支撐著，彈簧的力常數各為  $50 \text{ N/m}$ ，彈簧初始長度為  $80 \text{ cm}$ ，故罐子在初始位置時其底面恰好貼於水面(如圖 4.3 所示)。現將圓球逐一放入罐子中(如圖 4.4 所示)，假設罐子始終維持直立狀態，試問放入第幾顆球時水桶的水將溢出?(需寫出計算過程，未列出過程不予計分)

(d) (6%) 承上題，在水桶已達滿水位時再多放一顆球至罐子中，則因此球所造成的溢出水量為何?

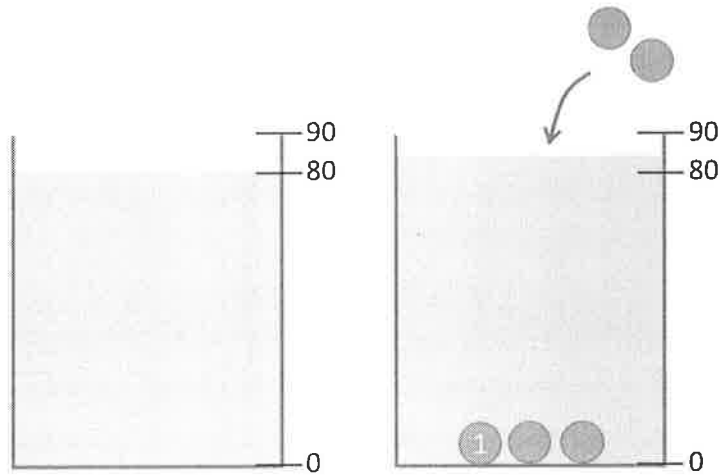


圖 4.1

圖 4.2

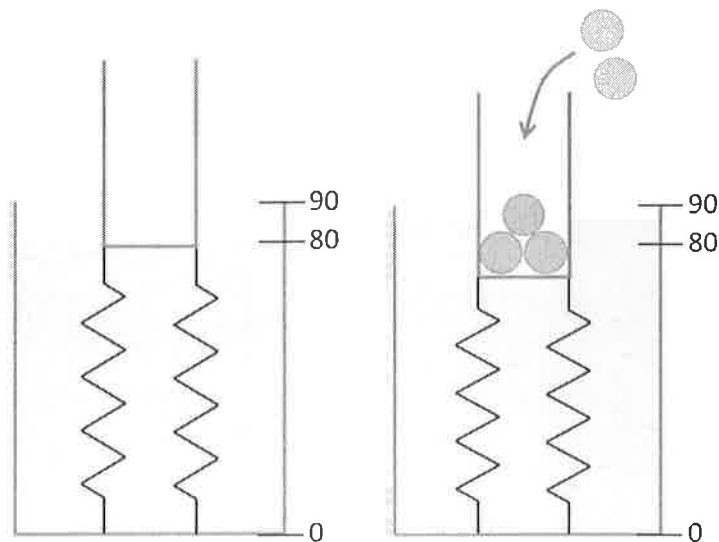


圖 4.3

圖 4.4

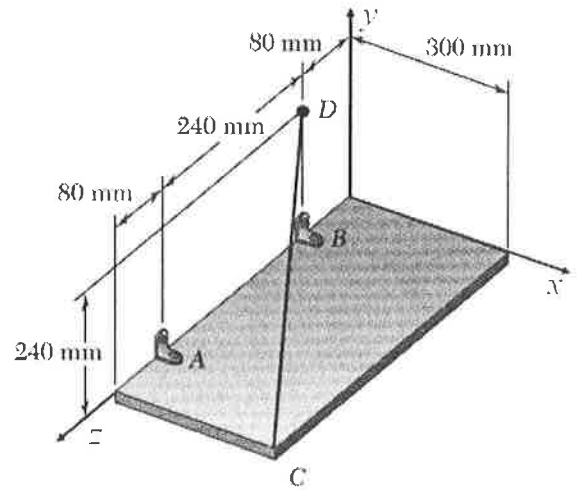
5. (20%) 一矩形板由  $A$  與  $B$  兩處的拖架以及一線材  $CD$  支撐。已知線材施加一張力於點  $C$ ，此張力可表示為向量  $\mathbf{P} = P\mathbf{e} = P_x\mathbf{i} + P_y\mathbf{j} + P_z\mathbf{k}$ ，其大小  $P$  為 200 N。粗體符號表示向量、斜體符號表示純量。其中  $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  分別為指向正  $x$ 、 $y$  和  $z$  軸的單位向量。 $\mathbf{e}$  為沿  $CD$  的單位向量， $|\mathbf{e}| = 1$ 。(需寫出計算或思考過程，未列出過程不予計分)

(a) (3%) 試以  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  表示  $\mathbf{e}$ 。

(b) (2%) 試求  $P_x$ 、 $P_y$  和  $P_z$ 。

(c) (7%) 試求  $\mathbf{P}$  對點  $A$  的力矩  $\mathbf{M}_A$ 。

(d) (8%) 若  $AB$  為固定軸，矩形板可繞  $AB$  旋轉， $\mathbf{P}$  對  $AB$  的力矩為  $M_{AB}\mathbf{k}$ 。試求  $M_{AB}$ 。(提示：若一力平行於轉軸，則此力對轉軸的力矩為零。)



6. (20%) 如下面圖示，有一批藉由超精密研磨後的半導體矽晶片，其直徑為 8 吋。目前已知矽晶片表面平面度 (flatness，表面上下起伏的大小) 可能在幾十奈米 (nanometers) 不等。若你擔任研發部的精密量測工程師，必須量測此批矽晶片的表面平面度，請以高中物理所學到的光學原理，以光學量測方式來進行量測工作，假設工作現場可用的工具不多，只有兩個直徑為 8 吋具有理想平面度的石英光學平板 (optical flat，完全平坦)、一個紅光 LED 檯燈，以及一支你平時做功課用的塑膠直尺 (長度為 20 cm、量測的最小刻度為 1 mm)。紅光的波長約為 632 奈米。

(a) (6%) 請利用圖示配合文字說明你的量測架構與原理。

(b) (6%) 請說明如何計算表面上下起伏的大小。

(c) (4%) 請問當你將石英光學平板放置在矽晶片表面上時，兩者表面之間若有接觸，請說明如何決定接觸點的位置。

(d) (4%) 若要決定兩片矽晶片的厚度是否相同，而且其量測解析度要達到奈米等級，請說明如何以現有工具來完成此任務。



8 吋半導體矽晶片 (表面有上下起伏)



石英光學平板 (完全平坦)