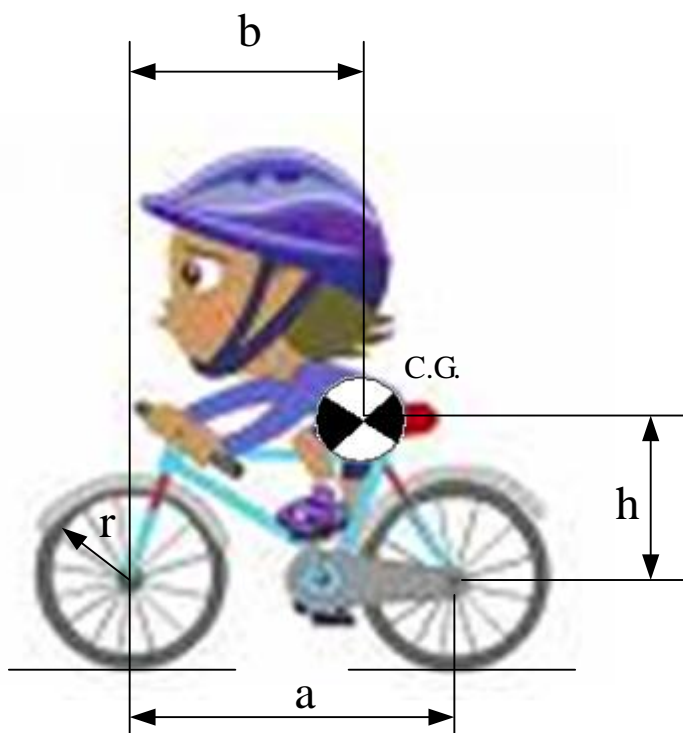


# 國立台灣大學 機械工程學系

## 98 學年度大學甄選入學綜合評量筆試試題

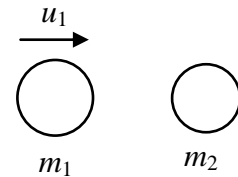
- 請注意：1. 題目共有 5 大題，每大題 20 分，滿分為 100 分。  
2. 請在另附的試卷上作答。  
3. 本試題紙請務必隨試卷繳回。

1. 騎單車時，如果按下前輪的煞車器做為緊急煞車，容易導致單車向前翻滾。假設有一台單車，當人騎上後，人加車的重心(C.G.)距離前輪車軸軸心在水平方向為  $b$  公尺，距離前輪車軸軸心在垂直方向為  $h$  公尺，車輪半徑為  $r$  公尺，前後輪中心距為  $a$  公尺，重力加速度為  $g$  公尺/秒<sup>2</sup>。今有一選手加車重  $m$  公斤
- (1) (6%) 騎在車上時，前後輪與地面接觸點的受力為何?
- (2) (8%) 在比賽途中，突然有人闖入車道，選手只緊急按下前輪的煞車器，車子迅速在 0.8 秒內自時速 50 公里等減速停止(假設煞車過程，車輪胎與地面沒有打滑)，如果車子不致向前翻滾，請問  $b$  與  $h$  的關係應如何? 設  $r=0.25$  公尺， $m=60$  公斤
- (3) (6%) 選手的體重會影響向前翻滾與否嗎? 為什麼?



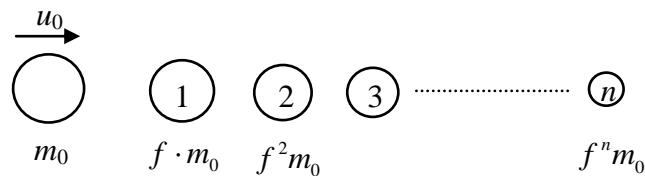
2. (1) (5%) 甲科學家認為可以由質點的碰撞產生高速運動的質點。我們要討論這個想法的可行性。參考右圖，在沒有外力作用下，質量  $m_1$  速度  $u_1$  的質點和質量  $m_2$  的靜止質點碰撞。假設碰撞的過程中沒有能量損耗，碰撞後  $m_1$ 、 $m_2$  的速度分別為  $v_1$ 、 $v_2$ 。請證明

$$v_1 = \frac{1-r}{1+r}u_1, \quad v_2 = \frac{2}{1+r}u_1$$



其中  $r$  代表  $m_2$  和  $m_1$  的比值 ( $r = m_2/m_1$ )。

- (2) (5%) 由(1)的結果可以看出  $r$  越小， $v_2$  的值越大。請證明  $v_2$  的上限為  $2u_1$ ，而且當  $v_2$  逼近  $2u_1$  時， $m_2$  的動能和入射質點的原動能 ( $m_1u_1^2/2$ ) 的比值約為  $4r$ 。由此可知， $v_2$  逼近  $2u_1$  時，碰撞後  $m_2$  的動能遠小於入射質點的原動能。
- (3) (5%) 顯然甲科學家的想法無法產生高速運動且具有高動能的質點。於是乙科學家提出下面的構想：利用一系列的碰撞來產生高速的質點。參考下圖，入射質點  $m_0$  的速度為  $u_0$ ，第一個質點的質量為  $f \cdot m_0$ ，第二個質點的質量為  $f^2m_0$ ，以此類推，第  $n$  個質點的質量為  $f^n m_0$ 。除了入射質點外，其餘質點碰撞前都為靜止。



假設碰撞過程中沒有外力作用，也沒有能量損失，請問第  $n$  個質點碰撞後的速度為何？其動能和入射質點原動能 ( $m_0u_0^2/2$ ) 的比值為何？(請將結果表為  $f$  的函數)

- (4) (5%) 承上題，請問為了使第  $n$  個質點碰撞後能兼有速度 ( $> 2u_0$ ) 和能量 ( $\approx m_0u_0^2/2$ )， $f$  的值應為：遠大於 1、略大於 1、略小於 1、或者遠小於 1。請簡單說明理由。

3. 質數 (prime number) 在數學上是很特殊的數字，如果一個數字不能被除了 1 及其本身以外的任何整數整除，這個數字就稱之為質數。而尋求質數的過程，也在數學的發展史上佔有重要的地位。本題將討論一些質數的性質。首先，尋找質數最直接而簡單的方法是“刪除法”，也就是將所有的整數列出來，先將 2 (已知 2 為質數) 的倍數刪除掉，於是知道下一個質數為 3，再將 3 的倍數刪除掉，於是知道下一個質數為 5，以此方式依序刪除掉已知質數的倍數，如下所示，可知 11~30 之間的質數有 11, 13, 17, 19, 23, 29。

1	②	③	<del>4</del>	⑤	<del>6</del>	⑦	<del>8</del>	<del>9</del>	<del>10</del>
⑪	<del>12</del>	⑬	<del>14</del>	<del>15</del>	<del>16</del>	⑰	<del>18</del>	<del>19</del>	<del>20</del>
<del>21</del>	<del>22</del>	⑳	<del>24</del>	<del>25</del>	<del>26</del>	<del>27</del>	<del>28</del>	㉑	<del>30</del>

$\diagdown$ ,  $\diagup$  and  $\times$  :divided by 2, 3 and 5, respectively.

- (1) (5%) 所謂的 *twin prime* 是指兩個相鄰的奇數皆為質數，例如 (3, 5)、(5, 7) 以及 (11, 13)；已知第四組 *twin prime* 是介於 31~100，試找出第四組 *twin prime*。
- (2) (5%) 雖然“刪除法”很簡單，但卻缺乏效率，於是數學家試著提出各種尋找質數的方程式。在十八世紀時尤拉 (Euler) 提出一個公式  $f(n) = n^2 + n + 1$ ，將  $n=1\sim 15$  代入， $f$  皆為質數，證明  $f(16)$  不是質數。
- (3) (5%) 美國職棒大聯盟之前的全壘打記錄為貝比魯斯 (Babe Ruth) 於 1935 年締造的 714 支，此記錄一直到 1974 年 4 月 8 日才被漢克阿儂 (Hank Aaron) 的第 715 支全壘打破。事實上 714 及 715 這兩個數字與質數有非常密切的關係，數學家稱之為 *Ruth-Aaron pairs*，具有特殊的性質。首先，714 可以表示為 4 個質數 (稱之為 714 的質因數) 的乘積，而 715 可以表示為 3 個質數 (稱之為 715 的質因數) 的乘積，試證明 714 及 715 滿足以下兩個性質：
- i. (714 的質因數總和) = (715 的質因數總和)。
  - ii.  $714 \times 715 =$  最小的 7 個質數相乘。
- (4) (5%) 事實上，在個位數 (1~9) 中剛好有兩個數字是 *Ruth-Aaron pairs* (亦即其彼此的質因數總和相等，且此兩數字相乘剛好是最小的幾個質數相乘)。請問這一組 *Ruth-Aaron pairs* 是什麼？

4. 任何一組  $n$  個隨機抽取的數值  $x_1, x_2, \dots, x_n$  算術平均數為  $\bar{x}$ ，標準差為  $s_x$ ，與任何一組  $n$  個隨機抽取的數值  $y_1, y_2, \dots, y_n$  算術平均數為  $\bar{y}$ ，標準差為  $s_y$ ，做結合運算。假使 X 系列與 Y 系列完全無關，則任何一個 X 系列之數值  $x_i$  與任何一個 Y 系列之數值  $y_j$  之和的算術平均數為  $\bar{x} + \bar{y}$ ，之差的算術平均數為  $\bar{x} - \bar{y}$ ，不論是和或是差的標準差皆為  $\sqrt{s_x^2 + s_y^2}$ 。自然界和人類社會中的許多現象，例如人的血壓、脈搏、身高、體重等的分佈情形，都和常態分佈近似，常態分配為一對稱型分配，在平均值上下一個標準差，所包括之機率約為 68%，平均值上下二個標準差，所包括之機率約為 95%，在平均值上下三個標準差，所包括之機率約為 99.7%。請利用以上的資訊，回答下列的問題：
- (1)(7%)小明想了解自己體重的分配，每天於早午晚量測自己的體重，經過一個月後，小明算得自己的體重平均值為 67kg，標準差為 1kg。請將小明之體重分佈曲線畫出，並請標明平均數與 1 個、2 個和 3 個標準差範圍內的大約機率。
- (2)(6%)經由一段時期實驗，小華得知自己的體重平均值為 85kg，標準差也為 1kg。有一天，小明與小華一起去乘船遊湖，請問他們所乘的船至少需承載何種重量的分佈，即此重量的平均值與標準差各是多少和此重量為何種分佈？
- (3)(7%)目前搭乘的交通工具，除了有台鐵，還有高鐵與捷運都是屬於軌道車輛。軌道車輛在交通管制上採取全程監控，需時時調整車輛行車間距，以避免追撞。試想如果在一個沒有監控行車間距的軌道上，一輛火車先行 10 公里後，第二輛火車再開動，假設二輛火車行駛的速度皆為一具有常態分配，平均值為每小時六十公里，標準差為每小時 7 公里之常態隨機變數，請問在一個小時後第二輛追撞上第一輛的機率大約是多少？
5. (1)(3%)請給攝氏溫標下一定義。
- (2)(3%)請以理想氣體為例，說明溫度的微觀物理意義。
- (3)(7%)常見測量體溫之儀器包括水銀溫度計及耳溫槍，請說明兩者之基本原理及優缺點。
- (4)(7%)何謂三相點，它在溫度量測上有何作用？水的三相點為攝氏幾度？